Królowe na szachownicy.[1]

Gra w szachy, w której zwłaszcza królowym i konikom przysługują posunięcia urozmaicone i skomplikowane, daje pole do różnych dociekań, częstokroć niepozbawionych interesu ze stanowiska matematycznego. Śród nich spotykamy poruszane przez wielu autorów t. zw. „zagadnienie o ośmiu królowych“, podane po raz pierwszy i w następstwie rozwiązane (w sposób empiryczny) przez Naucka w lipskiej „Illustrierte Zeitung“ w r. 1850. Gauss, zwróciwszy na nie uwagę, wszczął w tej sprawie z Schuhmacherem korespondencję, w której m. in. liczbę możliwych rozwiązań oznaczył na 92. W dalszym ciągu zagadnieniem tym zajmowali się: Bellavitis w „Atti del Instituto Veneto“ (t. VI, r. 1861), Lionnet w „Nouvelles Annales de Mathématiques“ (S. II t. V, r. 1869); Parmentier i Noë w r. 1867 spostrzeżenia swe zakomunikowali Lucasowi, który w następstwie uwzględnił je w swych „Récréations Mathématiques“. Wreszcie, w r. 1874 Günther w „Archiv für Mathematik und Physik“ (t. LVI) i Glaisher w „Philosophical Magazine“ (Ser. IV t. XLVIII) teorję zagadnienia tak posunęli, że odtąd ona, o ile nam wiadomo, ani kroku dalej nie postąpiła.

W zagadnieniu tym idzie o ustawienie, na pospolitej szachownicy, liczącej 64 pola w 8 szeregach i 8 kolumnach, ośmiu królowych w ten sposób, by z nich żadne dwie — według technicznego wyrażenia w grze w szachy — nie „szachowały“ się wzajemnie t. j. by w każdej kolumnie i każdym szeregu stanęła jedna lecz tylko jedna królowa, a na każdej z przekątnych szachownicy oraz każdej równoległej do jednej z nich znalazła się conajwyżej jedna królowa. Ogólniej, rozstawienia takiego należy dokonać z n królowemi na szachownicy o n^2 polach. Rzecz prosta, że wobec niedostatecznej, w komplecie figur szachowych,

[1]) Referat wygłoszony na posiedzeniu Sekcji matematycznej Stowarzyszenia Nauczycielstwa Polskiego w Warszawie d. 8 marca 1911 r.

liczby królowych, możemy poprzestać na pionkach, nadając im posunięcia skombinowane z posunięć wież i laufrów.

Jednoczesne stanowiska n królowych na szachownicy o n^2 polach zaznaczać będziemy przy pomocy liczb, złożonych z n różnych cyfr z pośród cyfr 1, 2, 3, ...n, rozumiejąc przez którąkolwiek cyfrę porządek zajętego przez królowę pola w odnośnej kolumnie, tak iż pierwsza cyfra określać będzie pole pierwszej kolumny, druga — drugiej i t. d., przytym cyfry i kolumny liczyć będziemy np. od lewej ręki ku prawej, a pola w kolumnie — od dołu ku górze. Każda taka liczba n-cyfrowa (których liczbę określimy na $n!$) odpowiadać będzie jednemu z rozmieszczeń n królowych z uwzględnieniem jedynie warunku co do kolumn i szeregów, t. j. w założeniu, że królowym przysługują jedynie posunięcia, właściwe wieżom. Jeżeli zaś uwzględnimy, że królowym przysługują jeszcze posunięcia, właściwe laufrom, przy których królowe mogą się szachować i w kierunkach przekątnych, wówczas liczbę możliwych rozwiązań wypadnie nam znacznie ograniczyć.

W odległości, równej połowie boku jednego pola szachownicy, zewnątrz niej, do dwuch przyległych jej krawędzi, poprowadźmy dwie równoległe, które przyjmijmy za osi spółrzędnych. Wyznaczywszy punkty środkowe każdego pola, otrzymamy na płaszczyźnie układ punktów, z których miejsce każdego będzie wyznaczane przy pomocy dwuch spółrzędnych: odciętą będzie liczba całkowita, wskazująca porządek odnośnej kolumny, a rzędną — szeregu. Wiadomo, że prosta, przeprowadzona przez dwa dane punkty, ma za spółczynnik kierunkowy stosunek różnicy rzędnych do różnicy odciętych. W razie jeżeli prosta ta jest przekątną szachownicy lub do niej równoległą, spółczynnik ten równa się ± 1, tak iż, co do wartości liczebnej, różnica rzędnych równa się różnicy odciętych. Stąd wnosimy, że, jeżeli królowe mają się nie szachować w kierunkach przekątnych, we wspomnianej liczbie n-cyfrowej żadne dwie cyfry nie mogą być tak ze sobą związane, aby ich różnica równała się różnicy miejsc, jakie te cyfry zajmują, t. j. dwie cyfry, zajmujące w tej liczbie miejsca p i q nie mogą się różnić o $|p-q|$.

Przychodzimy więc do następującego sposobu rozwiązania zajmującego nas zagadnienia. Z cyfr 1, 2, 3, ..., n tworzymy, bez powtórzeń, wszelkie możliwe liczby n-cyfrowe i odrzucamy z nich te, w których się okaże przynajmniej jedna para takich cyfr, że ich różnica będzie się równała różnicy ich miejsc; każda z liczb, która próbę tę wytrzyma, dostarczy nam jednego z szukanych rozwiązań. Taki jednak niewyszukany sposób nastręcza w praktyce poważne trudności: dość wspomnieć, że w razie pospolitej szachownicy mamy w ten sposób do rozważania $8!=40320$ liczb.

Zanim się wszakże z nim rozstaniemy, uczynimy jedno ważne spostrzeżenie ogólne. Ponieważ we wspomnianej liczbie wielocyfrowej żadne dwie cyfry nie mogą się różnić o różnicę swych miejsc, tak iż dwie cyfry bezpośrednio ze sobą sąsiadujące nie mogą się różnić o 1, lecz przynajmniej o 2, zbadajmy przeto w jakich wypadkach możliwe są rozwiązania postaci: 135... 246... lub 246... 135... które nazwijmy rozdzielno-parzystemi: składają się one z dwu szeregów cyfr, jednego z parzystych, drugiego z nieparzystych, idących po sobie w porządku naturalnym.

Co do pierwszej postaci, widzimy odrazu, że nie może ona mieć miejsca w razie parzystej liczby pól w szeregu ($n=2p$), ponieważ w takim razie dwie skrajne cyfry 1 i $2p$, równe porządkom swych miejsc, na różnicę dadzą właśnie tych miejsc różnicę.

Zauważmy dalej, że jeżeli przy ustawianiu królowych na szachownicy według którejkolwiek liczby rozdzielnoparzystej, dwie królowe staną na równoległej do jednej z przekątnych, wówczas miejsce jednej królowej winno odpowiadać cyfrze parzystej, drugiej—nieparzystej. Że zaś cyfry jedne i drugie tworzą postępy różnicowe, przeto gdy się zdarzy jedna para takich cyfr, że ich różnica równa się różnicy ich miejsc, wówczas toż samo będzie zachodziło i z parą poprzedzającą i t. d., tak iż w razie dwuch królowych na równoległej do którejkolwiek z przekątnych mamy i cały szereg innych par królowych w tenże sposób ustawionych. Stąd wnosimy, że jedna z dwuch królowych, rozmieszczonych równolegle do przekątnej szachownicy, w razie ustawienia według liczby 135... 246..., winna zająć stanowisko, odpowiadające cyfrze 2, a w razie liczby 246... 135...—cyfrze 1.

Przypuśćmy więc, że w ustawieniu 135... 246..., najwyższą cyfrą nieparzystą jest $2p+1$, zajmująca przeto (licząc od lewej ręki) miejsce p, tak iż 2 zajmuje miejsce $p+1$, oraz że królowej, której miejsce na szachownicy wyznacza cyfra 2, odpowiada leżąca na tejże równoległej do przekątnej królowa, której miejsce w kolumnie wyraża cyfra $2r+1$, zajmująca w szeregu cyfr powyższej liczby miejsce r. Mamy przeto: $(2r+1)-2=(p+1)-r$ skąd $p=3r-2$, tak iż $2p+1=6r-3$. W podobny sposób się przekonamy, że ustawienie 246... 135... jest niemożliwe w razie, jeżeli liczba pól w szeregu jest liczbą parzystą wzoru $6r-4$. Zatym rozwiązania postaci 135... 246... i 246... 135... mogą się przytrafiać tylko w razie, jeżeli liczba pól w szeregu szachownicy jest liczbą jednej z czterech postaci następujących: $6r$, $6r+1$, $6r+4$ lub $6r+5$, tak iż w razie szachownicy pospolitej (o 8 polach w szeregu) rozwiązania te nie mają miejsca.

Wspomniany na wstępie Günther zwrócił uwagę, że przy rozwią-

zywaniu zagadnienia o królowych na szachownicy nasuwa się z konieczności użycie wyznaczników. Jakoż, szachownica, której pola są porozmieszczane w szeregach i kolumnach, przedstawia bardzo wyraźną analogję z wyznacznikiem, — stąd szachownicę o n polach w szeregu możemy nazywać szachownicą n-go rzędu. Dalej, jeżeli zakres możliwych posunięć królowej ograniczymy do posunięć, przysługujących wieżom, to dwie nie szachujące się wzajemnie królowe winniśmy tak ustawiać, że po zajęciu przez jedną dowolnego pola szachownicy, drugą możemy już ustawić na dowolnym polu z wyjątkiem szeregu i kolumny, na których przecięciu umieścilibyśmy pierwszą królowę, — krócej, gdy pierwsza królowa zajmie dowolne pole całej szachownicy, druga winna zająć dowolne pole jej „minoru" względem pierwszego pola. Powtarzając podobne rozumowanie z każdą po kolei królową, dojdziemy wreszcie do przekonania, że każdy wyraz rozwinięcia wyznacznika, którego elementami są pola szachownicy (w odpowiedni sposób poodznaczane), będzie stanowił jedno z rozwiązań naszego zagadnienia, w założeniu, że posunięcia królowej są jednakowe z posunięciami wieży. Ponieważ jednak królowym przysługują nadto posunięcia właściwe laufrom, przeto z otrzymanego w powyższy sposób zbioru rozwiązań należy wyłączyć te, w których znajdzie się przynajmniej jedna para elementów, leżących na jednej równoległej do którejkolwiek z przekątnych wyznacznika a w szczególności na samej przekątnej. Otóż, rozwiązania takie odrazu rzucają się w oczy dzięki znakowaniu, które przyjmujemy pospolicie dla elementów wyznacznika; oznaczamy je mianowicie przy pomocy liter ze wskaźnikami, w ten sposób, że elementy, leżące na tejże równoległej do jednej przekątnej, zaznaczamy przy pomocy jednakowych wskaźników. W ten więc sposób wyznacznikowi, dającemu się zastosować do szachownicy jakiegokolwiek rzędu, możemy, według Günthera, nadać postać następującą:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_2, & c_3, & d_4, & \ldots \\ \beta_2, & a_3, & b_4, & c_5 & \ldots \\ \gamma_3, & \beta_4, & a_5, & b_6 & \ldots \\ \delta_4, & \gamma_5, & \beta_6, & a_7 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Przy rozwiązywaniu więc zagadnienia o królowych na szachownicy należy, rozwinąwszy podany wyżej wyznacznik, z rozwinięcia tego zachować takie jedynie wyrazy, w których każda z wchodzących w odnośny wyraz liter lub też każdy z zaznaczonych w nim wskaźników spotyka się tylko po razie jedynym: każdy z zachowanych w ten sposób wyrazów będzie stanowił jedno z rozwiązań obecnego zagadnienia.

Obecny więc sposób, jak widzimy, tym jedynie się różni od poprzedniego (cyfrowego), że odrzucanie wyrazów, nie będących rozwiązaniami zagadnienia, uskutecznia się tu automatycznie. Natomiast ogólna liczba wyrazów (która dla szachownicy n-go rzędu wynosi $n!$) nietylko pozostaje ta sama co przedtym, ale nadto wymaga dwa razy większej liczby znaków.

Glaisher nietylko usunął tę niedogodność, wykazując, jak można odrzucić z góry zbyteczne wyrazy rozwinięcia wyznacznika, ale nadto jeszcze podał sposób, zezwalający na spożytkowanie zupełnego układu rozwiązań dla szachownicy rzędu n go w celu otrzymania, dla szachownicy rzędu $(n+1)$-go, zupełnego układu rozwiązań „pewnego określonego rodzaju". Za podstawę do podziału rozwiązań na rodzaje Glaisher przyjął zawarte w rozwiązaniu to lub inne pole z pośród okalających szachownicę: rozwiązanie, w które wchodzi jedno z pól narożnych, zaliczył do rodzaju pierwszego; rozwiązania z polem, które bezpośrednio sąsiaduje z narożnym, — do drugiego; w razie pól dalszych, mamy rozwiązania rodzaju trzeciego, czwartego, i t. d. Z takiego określenia wnosimy, że w razie szachownicy rzędu $(2r-1)$-go lub $2r$ liczba rodzajów, na jakie dają się podzielić rozwiązania, wynosi r.

Przypuśćmy, że mamy szachownicę n-go rzędu, i zakreślmy w niej np. ostatnią kolumnę i ostatni szereg; na ich przecięciu niech się znajduje, dajmy na to, element p. Przypuśćmy dalej, że dla otrzymanej stąd szachownicy $(n-1)$-go rzędu wiadomy jest zupełny układ rozwiązań. Wówczas, jeżeli do każdego z tych rozwiązań dopiszemy element p, otrzymamy dla pierwotnej szachownicy szereg rozwiązań 1-go rodzaju, mieszczących element p,—z własności zaś wyznacznika wynika, że szachownica ta innych rozwiązań z elementem p mieć już nie może. Powtarzając podobne postępowanie z trzema innemi elementami narożnemi szachownicy pierwotnej, otrzymamy tą drogą zupełny układ rozwiązań rodzaju pierwszego.

Wnosimy stąd, że jeżeli zagadnienie obecne dla szachownicy $(n-1)$-go rzędu nie prowadzi do żadnych rozwiązań, wówczas dla szachownicy n-go rzędu nie otrzymamy wcale rozwiązań rodzaju pierwszego.

Dla wyjaśnienia istoty metody Glaishera odrzucania zbytecznych wyrazów w rozwinięciu wyznacznika, zwrócimy się do przykładów szczegółowych. W tym celu zauważmy przedewszystkim, że w razie $n=2$, gdy każde dwa pola leżą bądź w jednym szeregu, bądź w jednej kolumnie, bądź wreszcie w jednej przekątnej, zagadnienie wcale nie ma rozwiązania. Przeto dla $n=3$ nie może być rozwiązań rodzaju 1-go. Że zaś i rozwiązań 2-go rodzaju, ze względu na przyległość do siebie

wszystkich pól środkowych, zagadnienie to również nie dopuszcza, wnosimy przeto o zupełnej nierozwiązalności zagadnienia dla $n=3$. Zatym w razie $n=4$ nie otrzymamy rozwiązań rodzaju 1-go.

Aby teraz dla $n=4$ znaleźć rozwiązania rodzaju 2-go, w odnośnym wyznaczniku Günthera

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_2, & c_3, & d_4 \\ \beta_2, & a_3, & b_4, & c_5 \\ \gamma_3, & \beta_4, & a_5, & b_6 \\ \delta_4, & \gamma_5, & \beta_6, & a_7 \end{vmatrix}$$

elementy narożne zastąpimy przez zera, poczym w rozwinięciu tegoż według elementów któregokolwiek ze skrajnych szeregów lub kolumn otrzymamy dwa minory, np.:

$$b_2 \begin{vmatrix} \beta_2, & b_4, & c_5 \\ \gamma_3, & a_5, & b_6 \\ 0, & \beta_6, & 0. \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad c_3 \begin{vmatrix} \beta_2, & a_3, & c_5 \\ \gamma_3, & \beta_4, & b_6 \\ 0, & \gamma_5, & 0 \end{vmatrix}$$

Ponieważ w rozwinięciu pierwszego z tych minorów wyrazy, w które wejdzie litera b lub wskaźnik 2, z liczby możliwych rozwiązań należy wyłączyć, przeto, by ich naprożno nie wyprowadzać, odrazu wszystkie elementy z literą b lub wskaźnikiem 2 zastąpimy zerami. Po takiej zamianie, minor ten sprowadzi się do jedynego wyrazu: $b_2\, c_5\, \gamma_3\, \beta_6$. W podobny sposób (t. j. po zamianie elementów z literą c lub wskaźnikiem 3 na zera) znajdziemy, że drugi minor sprowadzi się do wyrazu $c_3\, \beta_2\, b_6\, \gamma_5$.

Biorąc minory powyższego wyznacznika według elementów β_2 i γ_3, c_5 i b_6, lub wreszcie γ_5 i β_6, przychodzimy za każdym razem do tych samych dwuch rozwiązań 2-go rodzaju.

Stąd wnosimy, że dla szachownicy rzędu 4-go otrzymujemy ogółem 2 rozwiązania, które, jak łatwo zauważyć, według cyfrowego sposobu przedstawiania rozwiązań, można przedstawić w postaci liczb: 2413 i 3142. Łatwo je spamiętać, zważywszy, że pierwsze należy do rozdzielnoparzystych (zawiera mianowicie naprzód cyfry parzyste, następnie nieparzyste, w porządku naturalnym) a drugie stanowi proste odwrócenie pierwszego kolumnami (t. j. układ ten jest jakby odbiciem pierwszego w zwierciadle).

W razie $n=5$, wyznacznik Günthera przybiera postać następującą:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_2, & c_3, & d_4, & e_5 \\ \beta_2, & a_3, & b_4, & c_5, & d_6 \\ \gamma_3, & \beta_4, & a_5, & b_6, & c_7 \\ \delta_4, & \gamma_5, & \beta_6, & a_7, & b_8 \\ \varepsilon_5, & \delta_6, & \gamma_7, & \beta_8, & a_9 \end{vmatrix}$$

Zakreślając w nim za każdym razem po jednym szeregu i jednej kolumnie, na których przecięciu znajduje się jeden z narożnych elementów: a_1, e_5, ε_5 i a_9, dla każdej z otrzymanych stąd szachownic 4-go rzędu wypisujemy odnośne rozwiązania:

$$\gamma_5\, b_4\, c_7\, \beta_8\,,\quad \beta_4\, c_5\, b_8\, \gamma_7$$
$$\delta_4\, a_3\, b_6\, \gamma_7\,,\quad \gamma_3\, b_4\, a_7\, \delta_6$$
$$\beta_4\, c_3\, d_6\, a_7\,,\quad a_3\, d_4\, c_7\, b_6$$
$$\gamma_3\, b_2\, c_5\, \beta_6\,,\quad \beta_2\, c_3\, b_6\, \gamma_5$$

Dopisując do każdego z rozwiązań pierwszej pary element a_1, drugiej e_5 i t. d., otrzymamy dla szachownicy 5-go rzędu 8 rozwiązań rodzaju 1-go; wszystkie one, jak widzimy, będą odrębne.

Przystępując do rozwiązań rodzaju 2-go, przedewszystkim elementy narożne zastępujemy zerami, poczym w minorach tak zmienionego wyznacznika względem drugiego i przedostatniego elementu któregokolwiek ze skrajnych szeregów lub kolumn, np. względem b_2 i d_4, zastępujemy przez 0 elementy z literą b lub wskaźnikiem 2 w pierwszym minorze, a z literą d lub wskaźnikiem 4 w drugim, poczym pierwszy z minorów sprowadzi się do wyrazu $b_2\, d_6\, a_5\, \delta_4\, \beta_8$, drugi do $d_4\, \beta_2\, a_5\, b_8\, \delta_6$. Minory tegoż wyznacznika według elementów β_2 i δ_4, d_6 i b_8, a wreszcie δ_6 i β_8 prowadzą do takichże wyrazów. Wnosimy stąd, że dwa te wyrazy stanowią dwa jedynie możliwe rozwiązania rodzaju 2-go.

Dla osiągnięcia rozwiązań rodzaju 3-go, zwracamy się do wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & c_3, & 0, & 0 \\ 0, & a_3, & b_4, & c_5, & 0 \\ \gamma_3, & \beta_4, & a_5, & b_6, & c_7 \\ 0, & \gamma_5, & \beta_6, & a_7, & 0 \\ 0, & 0, & \gamma_7, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

który otrzymamy z poprzedniego, zastępując przez 0 elementy, przyległe do narożnych w skrajnych szeregach i kolumnach. Jeżeli w minorze tegoż według np. c_3 zastąpimy przez 0 elementy z literą c lub wskaźnikiem 3, otrzymamy wyznacznik, w którym pierwszy szereg składa się z samych zer, tak iż rozwiązania żadnego nie znajdziemy. Postępując w ten sam sposób z elementami γ_3, c_7 i γ_7, przekonamy się o nieistnieniu rozwiązań rodzaju 3-go.

Ogółem więc dla szachownicy rzędu 5-go mamy 10 rozwiązań, mianowicie 8 pierwszego i 2 drugiego rodzaju. Według znakowania cyfrowego, rozwiązania te możemy przedstawić w postaci liczb: 14253, 53142, 31425, 42531, 35241, 24135, 52413, 13524 (1 rodz.), 25314, 41352 (2 rodz.). Nic łatwiejszego, jak wszystkie je spamiętać. W tym celu wystarczy

zaznaczyć, że jedno z nich (13524) należy do rozdzielnoparzystych, drugie (42531) stanowi jego odbicie, a każde z pozostałych otrzymamy z dwuch pierwszych za pomocą kołowej przemiany cyfr.

Oram — jak podaje Rouse-Ball — dowiódł, że, o ile rząd szachownicy jest liczbą pierwszą, wówczas kołowa przemiana cyfr jednego rozwiązania daje nowe rozwiązania; ani jednak szczegółów tego dowodzenia, ani tytułu odnośnej pracy Orama, Rouse-Ball w swych „Mathematical Recreations“ nie podaje.

Zauważmy przy sposobności, że rozwiązania rodzaju pierwszego prościej dają się otrzymywać bez pomocy wyznaczników. Jakoż, jeżeli do każdego z rozwiązań dla szachownicy 4-go rzędu: 2413 i 3142 dopiszemy raz z prawej, następnie z lewej strony nową cyfrę 5, a po powiększeniu o 1 wszystkich cyfr powyższych rozwiązań dopiszemy znów z prawej lub z lewej strony cyfrę 1, otrzymamy ponownie wszystkie 8 rozwiązań rodzaju 1-go, właściwe szachownicy rzędu 5-go. Przy użyciu jednak takiego sposobu należy zawsze sprawdzić, czy otrzymane liczby istotnie odpowiadają zagadnieniu, t. j. czy w którejkolwiek z tych liczb niema pary cyfr, różniących się od siebie o różnicę swych miejsc.

Że zastrzeżenie to jest konieczne, świadczy przykład szachownicy rzędu 6-go, dla której sposobem podanym otrzymamy 40 liczb, mających przedstawiać rozwiązania rodzaju 1-go; tymczasem w pierwszej zaraz z tych liczb, 614253, cyfry 6 i 4 zajmują odpowiednio miejsca 1 i 3, tak że różnica jednych i drugich wynosi 2; w innej liczbie 142536 to samo się stosuje do cyfr 1 i 6, i t. d.; ostatecznie się przekonamy, że dla szachownicy rzędu 6-go niema ani jednego rozwiązania rodzaju pierwszego.

Sposobem, podanym przy szachownicy rzędu 5-go, znajdziemy dla szachownicy rzędu 6-go cztery rozwiązania (wszystkie rodzaju 2-go); dla szachownicy rzędu 7-go rozwiązań 40 (16 pierwszego, 24 drugiego, wreszcie ani jednego rozwiązania rodzaju trzeciego i czwartego); dla rzędu 8-go, zgodnie z Gaussem, znajdziemy rozwiązań 92 (mianowicie 16 pierwszego, 56 drugiego, 30 trzeciego i 0 czwartego rodzaju).

Powyższe liczby rozwiązań dla poszczególnych szachownic można znacznie zredukować, zważając, że to samo rozwiązanie wygląda na szachownicy rozmaicie, stosownie do tego, z której strony spoglądamy na szachownicę, jako też stosownie do tego, czy spoglądamy wprost na szachownicę czy też na odbicie w zwierciadle. Tak np. z rozwiązania 13524 dla szachownicy rzędu 5-go, spoglądając na nią nie z za dolnej, lecz z za prawej krawędzi, otrzymamy rozwiązanie 52413; toż samo rozwiązanie względem krawędzi górnej lub lewej przedstawi się jako 24135 lub 35241; przez odbicie zaś każdego z nich w zwierciadle otrzy-

mamy odpowiednio: 42531, 31425, 53142 i 14253. Widzimy więc, że na 8 rozwiązań rodzaju 1-go, właściwych szachownicy rzędu 5-go, wystarczy przyjąć jedno tylko, t. zw. zasadnicze, ponieważ pozostałe, zwane pochodnemi, stanowią tylko jego odmiany. Z rozwiązania zasadniczego otrzymamy trzy pochodne stosownie do trzech pozostałych krawędzi, przyjmowanych kolejno za podstawy szachownicy, oraz cztery inne, będące ich odbiciami w zwierciadle; trzy pierwsze nazywamy pochodnemi przez obrót (zmiana bowiem podstawy odpowiada obrotowi szachownicy o 90°, 180° lub 270°), cztery ostatnie — pochodnemi przez odbicie. Rozwiązanie pochodne przez odbicie różni się od swego pierwowzoru tylko następstwem kolumn (pierwsza staje się ostatnią), otrzymuje się przez proste odwrócenie cyfr liczby pierwotnej. Również dla otrzymania rozwiązań pochodnych przez obrót niema potrzeby odtwarzania danego rozmieszczenia na szachownicy. Jakoż, w cyfrowym przedstawianiu rozwiązań każda cyfra wskazuje szereg, a jej miejsce — kolumnę szachownicy. Przy obrocie szachownicy o 90° koło dowolnego wierzchołka, kolumny stają się szeregami, a szeregi kolumnami, tak iż aby od danego ustawienia królowych przejść do pochodnego przez obrót o 90°, wystarczy miejsce cyfry zastąpić samą cyfrą, a cyfrę—jej miejscem, t. j. wystarczy tylko zaznaczać miejsca kolejnych cyfr w pierwotnym rozwiązaniu. Tak np. w rozwiązaniu 13524, licząc od strony prawej, ku której dokonywamy obrotu, cyfra 1 zajmuje miejsce 5, 2—drugie, 3—czwarte, 4—pierwsze i 5—trzecie, tak iż jako wynik wspomnianego obrotu otrzymamy stąd liczbę 52413; przez nowy obrót ta ostatnia zamieni się na 24135, ta znów na 35241.

Łatwo zauważyć, że z 4 rozwiązań, mianowicie pierwotnego i trzech odeń pochodnych przez obrót, trzecie z pierwszym, a czwarte z drugim tak są związane, że kolejne ich cyfry, licząc od prawej jednego a lewej drugiego, parami dopełniają się do 6, i wogóle do $n+1$. Da się to tym wytłumaczyć, że przy obrocie szachownicy o 180° górny jej brzeg staje się dolnym a prawy lewym, i odwrotnie, tak iż kolumny pozostaną kolumnami, lecz porządek ich ulegnie odwróceniu, a odnośne pole kolumny, które przedtym, licząc a pól pod sobą i b pól nad sobą, przyczym $a+b+1=n$, zajmowało w kolumnie $(a+1)$-sze miejsce, obecnie zajmie $(b+1)$-sze, przyczym $(a+1)+(b+1)=n+1$.

Nie zawsze się zdarza, by wszystkie cztery wspomniane rozwiązania były od siebie różne. Dla szachownicy np. 6-go rzędu rozwiązanie 246135 przez obrót o 90° zamieni się na 362514, a to znów przez nowy obrót—na rozwiązanie pierwotne. Rozwiązanie 2413, otrzymane dla szachownicy rzędu 4-go, pozostaje bez zmiany przy wszelkim dokonanym obrocie. Że zaś rozwiązanie pochodne przez odbicie zawsze

będzie różne od swego pierwowzoru, wnosimy więc że z danego rozwiązania zasadniczego możemy otrzymać ogólem 8, 4 lub 2 różnych rozwiązań; w pierwszym razie rozwiązanie to nazwiemy zwykłym, w drugim—półsymetrycznym, wreszcie symetrycznym.

Zestawiamy poniżej rozwiązania zasadnicze dla poszczególnych szachownic, przyczym półsymetryczne wyróżniamy przy pomocy nawiasów, a symetryczne – klamer.

Dla szachownicy 4-go rzędu mamy jedno rozwiązanie zasadnicze: [3142].

Dla 5-go rzędu — 2: 14253, [25314].
„ 6-go „ 1: (246135).
„ 7-go „ 6: 1357246, 3572461, (5724613), 4613572, 3162574, (2574136).
„ 8-go „ 12: 25713864, 57138642, 73186425, 82417536, 68241753, 36824175, 64713528, 36814752, 36815724, 72418536, 26831475, (64718253).

Szachownicami 9-go i 10-go rzędu zajmował się Pein w broszurze „Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern" (1889). Dla pierwszej z nich otrzymał 46 rozwiązań zasadniczych (jedno z nich: 248396157), dla drugiej — 92 (jedno z nich 2468d13579, gdzie $d=10$). Dla szachownicy 11-go rzędu Sprague w rozprawie, ogłoszonej w t. XVII, „Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society"

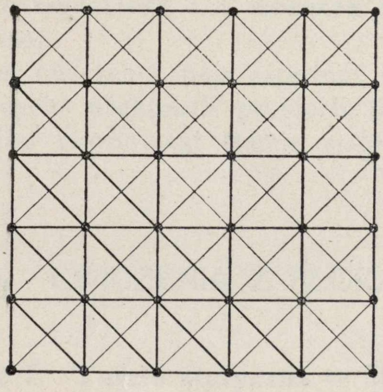


Fig. 1.

(1898/9), znalazł 341 rozwiązań zasadniczych, a w tej liczbie 15926d37j48, gdzie $d=10$, $j=11$.

W sklepach z zabawkami możemy spotkać grę następującą. Na desce kwadratowej z 36 otworami, równoodległemi od siebie i rozmieszczo-

nemi w 6 rzędach i tyluż kolumnach, a połączonemi ze sobą za pomocą prostych poziomych, pionowych i przekątnych (jak na fig. 1), należy powtykać 6 danych kołeczków, tak aby żadne dwa nie znalazły się na jednej z zaznaczonych prostych. Jak widzimy, gra ta niczym się nie różni od zagadnienia o 6 królowych na szachownicy 6-go rzędu, które to zadanie, jako — według powyższej tabliczki — prowadzące do najmniejszej liczby rozwiązań, nastręcza największe właśnie trudności.

A. Łaparewicz.